ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x, y \in (\alpha, \beta)$, $z = x^{y^z}$. Доказать, что не существует таких непостоянных бесконечно дифференцируемых функций a, b, c, что $c(z) \equiv a(x) + b(y)$.

2. Для функции $f(x) = x - x^\alpha$ ($\alpha > 1$) и точки $x_0 \in (0,1)$ найти асимптотику стремления к нулю величин $\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x_0)\ldots)$ при $n \to \infty$.

3. Могут ли у функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ на некотором более чем счетном множестве существовать не равные друг другу правая и левая производные?

4. Существует ли такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(f(x)) \equiv e^x$?

5. Пусть $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, при $|x| > 1$ удовлетворяющая неравенству $u'(x)v'(x) + v''(x) + 1 \leqslant 0$, где $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая бесконечно дифференцируемая функция со свойством $v(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Доказать, что $\int_{\mathbf{R}} e^{u(x)}\,dx < +\infty$.

6. Функция $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n q_n^x x^{k_n}$, где c_k — ненулевые рациональные числа, q_n — числа из промежутка $(0;1]$, k_n — натуральные числа, принимает целые значения в натуральных x и не тождественна нулю. Доказать, что все $q_n = 1$.

7. Пусть множество $Y \subset [0,1]$ состоит из таких чисел $y = 0{,}y_1y_2\ldots$ (двоичная запись: каждое y_n равно 0 или 1), что для любого натурального $m > N(y)$ выполняется неравенство
$$\sum_{n=1}^{m} y_n > \frac{m}{2}.$$
Доказать, что лебегова мера множества Y равна нулю.

8. Среди всех комплексных многочленов $(z - c_1)\cdot\ldots\cdot(z - c_n)$, все нули c_k которых по модулю меньше 1, найти многочлен с максимальным минимумом модуля на единичной окружности.

9. Нормированное пространство $\mathbf{c}_0$ состоит из стремящихся к нулю действительных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, с нормой $\|x\| = \max\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}$. На декартовом произведении $\mathbf{c}_0 \times \mathbf{c}_0$ введем норму $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. Существует ли линейная биекция $A : \mathbf{c}_0 \times \mathbf{c}_0 \to \mathbf{c}_0$, сохраняющая расстояние между точками?

Решения задач принимаются в письменном виде Наталией Андреевной Пашновой (ауд. 16-23а; 25 марта с 14.00 до 16.00). Можно представлять решения не всех задач. На работах следует указать фамилию, имя, отчество, номер группы, контактный телефон или электронный адрес. Победители получат призы и допуск к специально организованным досрочным экзаменам по математическому анализу и действительному анализу.