ОЛИМПИАДА

по "экстремальным задачам"

05 апреля 2010 г.

<u>**Задача 1.**</u> (3 балла) Найти минимум суммы $x_1 + x_2^2$ при условии, что

$$x_1x_3 + \frac{x_2^3}{2} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_3^3.$$

<u>**Задача 2.**</u> (4 балла) Города А и В расположены на расстоянии 13 км друг от друга и на расстояниях, соответственно, 1 и 6 км от берега моря. Какова минимально возможная сумма расстояний от некоторой точки до двух городов и до моря (берег моря — прямая линия)?

<u>**Задача 3.**</u> (5 баллов) Найти многочлен второй степени $p(x)$, такой чтобы $\max\limits_{x\in[-1,1]} |p(x) - |x||$ был минимален.

<u>**Задача 4.**</u> (6 баллов) Между пунктами А и В расстояние 60 км. Поезд останавливается в А и через час в В. С каким наименьшим максимальным (по модулю) ускорением мог двигаться поезд?

<u>**Задача 5.**</u> (9 баллов) На плоскости $\mathbb{R}^2$ расположены n точек $a_1, \ldots, a_n$ и окружность S радиуса R. Пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ обозначает стандартное (евклидово) расстояние в $\mathbb{R}^2$. Найти такую наибольшую константу C, чтобы неравенство

$$\max_{x\in S} \sum_{k=1}^{n} \rho(x, a_k) \geq C$$

выполнялось при всевозможных расположениях точек a_k и окружности S на плоскости.

<u>**Задача 6.**</u> (15 баллов) Найти максимальное α, при котором для любых неотрицательных чисел x_0, x_1, y_0, y_1 выполняется неравенство:

$$x_0^\alpha y_0^\alpha + \max(x_1^\alpha y_0^\alpha, x_0^\alpha y_1^\alpha) + x_1^\alpha y_1^\alpha \geq (x_0 + x_1)^\alpha (y_0 + y_1)^\alpha.$$

Результаты и награждение победителей — 13 апреля в 16-45 ауд. 12-24 на встрече с преподавателями кафедры общих проблем управления.